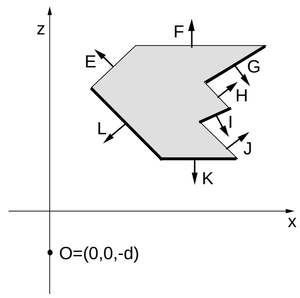
Tentamen Computer Graphics

17 november 1997

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de 3 opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis. Succes!

Opgave 1. Het Cohen-Sutherland algoritme clipt een lijnstuk AB, met beginpunt $A = (x_1, y_1)$ en eindpunt $B = (x_2, y_2)$, t.o.v. een rechthoekig window W in het vlak. Dit gebeurt aan de hand van gebiedscodes die de relatieve posities van de eindpunten van het lijnstuk t.o.v. de windowranden aangeven. Beschouw nu *drie-dimensionale* lijn clipping. **a**. (1 pt) Welke vorm heeft het kijkvolume in het geval van (i) parallelle projectie; (ii) perspectivische projectie ? Hoe kunnen deze kijkvolumes worden getransformeerd naar een genormaliseerd kijkvolume ? **b**. (1 pt) Neem vanaf nu aan dat het kijkvolume een *kubus* is. Het Cohen-Sutherland algoritme kan worden aangepast voor lijn clipping t.o.v. deze kubus W. Hoe moeten nu de verschillende gebieden van de 3D ruimte gecodeerd worden? Hoe kan uit de codes van de eindpunten, code(A) en code(B), bepaald worden of AB geheel binnen, dan wel geheel buiten, de kubus W valt? **c**. (1 pt) Geef kort aan hoe het Liang-Barsky lijn clipping algoritme kan worden uitgebreid naar 3D lijn clipping t.o.v. een kubus W.

Opgave 2. Een van de eenvoudigste 'hidden-surface removal' methoden voor het elimineren van onzichtbare polygonale vlakken is *back-face culling*.



Figuur 1: *Polyhedron met facetten. E en F zijn voorbeelden van back-faces, K en L zijn voorbeelden van front-faces.*

Beschouw een polyhedron $Poly$ dat via perspectief projectie met centrum $\mathbf{O} = (0, 0, -d)$, $d > 0$, wordt afgebeeld op het vlak $z = 0$, zie Fig. 1 voor een 2D schets. Een 'back-face' is een polygonaal facet van $Poly$ waarvan de uitwendige normaal van de waarnemer af gericht is, zodat dat facet onzichtbaar is vanuit het kijkpunt $\mathbf{O}$. Een facet dat geen back-face is noemen we een 'front-face'. **a**. (1 pt) Stel polygon P is een back-face van $Poly$. Welke relatie bestaat in dat geval tussen de uitwendige normaal $\vec{n}$ van P en de vector van het kijkpunt $\mathbf{O}$ naar een willekeurig punt van P? **b**. (1 pt) Stel de vergelijking van polygon P heeft de vorm:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0.$$

Toon aan dat P een back-face is als geldt:

$$C > D/d$$

c. (1 pt) Hoe luidt de voorwaarde onder **b**. in het geval van *loodrechte* projectie? Interpreteer het resultaat. **d**. (1 pt) Front-faces zijn niet noodzakelijk zichtbaar. Noem een klasse van polyhedra waarvoor dit wel het geval is.

Opgave 3. Een driedimensionale scène wordt d.m.v. een perspectivische transformatie $\mathcal{M}$ geprojecteerd op het vlak $z = 0$. Het projectiecentrum bevindt zich in het punt $\mathbf{O} = (0, 0, -d)$, $d > 0$. In homogene coördinaten wordt deze projectie gerepresenteerd door de matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{pmatrix}$$

a. (1 pt) Zij $T(d)$ de translatie in de positieve z-richting over een afstand d. Geef de bijbehorende transformatiematrix (in homogene coördinaten). **b**. (1 pt) Zij nu $\mathcal{S}$ de volgende samengestelde transformatie (in de aangegeven volgorde):

1. translatie van de oorsprong naar het punt **O**;
2. perspectief projectie vanuit het punt **O** zoals boven aangegeven;
3. translatie van **O** terug naar de oorsprong.

Geef de (4×4) matrix S die deze transformatie $\mathcal{S}$ beschrijft. Welke 3D transformatie $x \mapsto x', y \mapsto y', z \mapsto z'$ correspondeert hiermee? Geef een meetkundige interpretatie van het resultaat. **c**. (1 pt) Zij nu V het vlak met vergelijking $x - z + 1 = 0$. In het punt $(1, 0, 1)$ bevindt zich een puntvormige lichtbron. V is een spiegelend oppervlak dat voldoet aan Phong's belichtingsmodel $I_r = k_r(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})^n I$, n een positief geheel getal, waarbij

I = invallende lichtintensiteit;
I_r = weerkaatste lichtintensiteit;
k_r = reflectiecoëfficiënt;
$\mathbf{R}$ = reflectie(eenheids)vector;
$\mathbf{V}$ = kijk(eenheids)vector.

Gevraagd wordt te bepalen op welke positie in het projectievlak $z = 0$ het highlight (punt van maximum intensiteit) ligt bij de boven gegeven perspectivische transformatie $\mathcal{M}$. Motiveer uw antwoord.
(*Aanwijzing*: reduceer de vraag tot een 2D probleem.)

Uitwerkingen

Opgave 1. **a**. (i) parallelle projectie: kijkvolume is parallellepipedum. (ii) perspectivische projectie: kijkvolume is frustum (afgeknotte piramide). Deze kijkvolumes worden getransformeerd naar een genormaliseerd kijkvolume via: (geval i) shear en schaling; (geval ii) shear, schaling en perspectief transformatie.

b. Gebieden van de 3D ruimte kunnen gecodeerd worden door een 6-tupel $b_5\, b_4\, b_3\, b_2\, b_1\, b_0$, met $b_i = 1$ als het punt links, rechts, onder, boven, vóór resp. achter W ligt, voor $i = 0, \ldots, 5$.

$$\begin{aligned} code(A) \vee code(B) = 000000 \quad &\Longrightarrow \quad AB \text{ geheel binnen } W \\ code(A) \wedge code(B) \neq 000000 \quad &\Longrightarrow \quad AB \text{ geheel buiten } W \end{aligned}$$

c. Liang-Barsky lijn clipping t.o.v. een kubus W: Parametriseer het lijnstuk:

$$x = x_1 + u\,\Delta x,\ y = y_1 + u\,\Delta y,\quad z = z_1 + u\,\Delta z,\quad 0 \leq u \leq 1.$$

De voorwaarde dat een punt binnen W ligt kan worden weergegeven door 6 ongelijkheden: $u\,p_i \leq q_i, i = 1, \ldots, 6$. Bereken nu $u^+ = min(\{u_i^+\}, 1)$ en $u^- = max(\{u_i^-\}, 1)$, waarbij u_i^+ (resp. u_i^-) de waarde van q_i/p_i is voor die randen van W waarvoor het lijnstuk van binnen naar buiten (resp. buiten naar binnen) loopt. Het geclipte deel wordt nu bepaald door het interval $[u^-, u^+]$.

Opgave 2. **a**. Als P een back-face is, dan geldt dat het inproduct van de uitwendige normaal $\vec{n}$ van P en de vector van het kijkpunt $\mathbf{O} = (0, 0, -d)$ naar een willekeurig punt, zeg $\vec{x} = (x, y, z)$, van P positief is: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \mathbf{O}) > 0$.

b. De uitwendige normaal van P is (A, B, C) (bij conventie). De vgl. uit a. wordt nu: $(A, B, C) \cdot (x, y, z+d) > 0$, d.w.z. $Ax + By + C(z+d) > 0$. Omdat $Ax + By + Cz + D = 0$, wordt dit $-D + Cd > 0$, d.w.z. $C > D/d$.

c. Bij loodrechte projectie kunnen we in b. de limiet $d \to \infty$ nemen: dit levert de voorwaarde $C > 0$. Dit is ook duidelijk: ieder vlak waarvan de z-component van de uitwendige normaal positief is (d.w.z. $C > 0$), is een backface bij loodrechte projectie.

d. Convexe polyhedra.

Opgave 3. **a**. De transformatie is $x' = x, y' = y, z' = z + d$, met matrix

$$T(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b.

$$S = T(d)\,M\,T(-d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

In homogene coördinaten is dit de transformatie:

$$x'_h = x_h, y'_h = y_h, z'_h = z_h, w'_h = z_h/d$$

In 3D coördinaten wordt dit (N.B. $x = x_h/w_h, y = y_h/w_h, z = z_h/w_h$):

$$x' = x'_h/w'_h = xd/z,\ y' = y'_h/w'_h = yd/z,\ z' = z'_h/w'_h = d$$

Dit is een perspectief projectie op het vlak $z = d$ met centrum $(0, 0, 0)$.

c. Het highlight ligt waar $\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = 1$: kijkvector parallel aan de gereflecteerde vector. De gereflecteerde straal ligt in één vlak met de normaal $\mathbf{N} = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$. Dus het is voldoende het probleem in het vlak $y = 0$ te bekijken. De vector $\mathbf{V}$ wijst naar het oog in $\mathbf{O} = (0, 0, -d)$. Omdat het vlak V een hoek van $45°$ maakt met de z-as en de lichtbron in $(1, 0, 1)$ staat zie je direct dat de lichtvector $\mathbf{L} = (1, 0, 0)$. Dus $\mathbf{R} = \mathbf{V} = (0, 0, -1)$. D.w.z. het highlight ligt op positie $(0, 0, 1)$ in het vlak V, dus na projectie op $(0, 0)$.